ECOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1980

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Respecter strictement et mettre en évidence la numérotation des parties et des questions.

Ce problème propose l'étude de la convergence et le calcul d'intégrales de la forme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin x, \cos x)}{x^n}\, dx \,, \quad n \in \mathbb{N}^* \,, \quad f \text{ polynôme}, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

I

$m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \geqslant n$.

Soit $I(m,n) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^m x}{x^n}\, dx$.

On rappelle que, si $\binom{m}{p} = C_m^p = \frac{m!}{p!\,(m-p)!}$,

pour $m = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\sin^m x = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{1}{2}\binom{m}{\frac{m}{2}} + (-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^p \binom{m}{p} \cos(m-2p)\,x\right]$

et pour $m = 2q+1$, $q \in \mathbb{N}$, $\sin^m x = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^p \binom{m}{p} \sin(m-2p)\,x$.

I.1.a Pour $m = 2q+1$, exprimer la somme : $\sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^p \binom{m}{p}$

à l'aide du seul coefficient du binôme $\binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}$.

. . . / . .

I.1.b Pour $m = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$, exprimer la dérivée d'ordre $n-1$ de $\sin^m x$, $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\sin^m x)$, par une somme de termes portant sur des cosinus. Préciser cette somme quand $n = 4n_1 + 1$ ou $n = 4n_1 - 1$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$. En déduire, pour $x = 0$, la valeur numérique de la somme :

$$\sum_{p=0}^{\frac{m}{2}-1} (-1)^p \binom{m}{p} (m-2p)^{n-1} .$$

I.1.c u et v désignant deux fonctions de x de classe C^{n-1} sur $\mathbb{R}$, démontrer l'égalité :

$$\int_a^b u^{(n-1)} v\,dx = \left[u^{(n-2)} v - u^{(n-3)} v' + \ldots + (-1)^{n-2} u v^{(n-2)} \right]_a^b + (-1)^{n-1} \int_a^b u v^{(n-1)}\,dx,$$

$u^{(n-k)}$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, désignant la dérivée d'ordre $n-k$ de u, avec $u^{(o)} = u$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

I.2 On étudie l'intégrale $I(\alpha) = \int_o^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$, $\alpha > 0$.

Soit $I_o = \int_o^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ et $I_1 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

I.2.a Étudier la convergence de I_o.

I.2.b Étudier la convergence de I_1. Conclure sur $I(1)$.

I.2.c Étudier la série numérique (u_h) de terme général : $u_h = \int_{h\pi}^{(h+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$, $h \in \mathbb{N}^*$, retrouver la conclusion du 2/ b/ .

I.2.d On admettra que $\int_o^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Calculer $I(\alpha)$.

L'intégrale $I(\alpha)$ est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+^*$?

I.3 On admettra que, pour $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $\int_o^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \text{Log} \left| \frac{b}{a} \right|$.

I.3.a $q \in \mathbb{N}$, $\forall p = 0, 1, 2, \ldots, q$, $a_p \in \mathbb{R}$, $\sum_{p=0}^{q} a_p = 0$; $A_p \in \mathbb{R}$, $S_q = \sum_{p=0}^{q} a_p A_p$;

$\lambda_o = a_o$; pour $0 < p \leqslant q-1$, $\lambda_p - \lambda_{p-1} = a_p$; $\lambda_{q-1} = -a_q$.

Exprimer S_q à l'aide des λ_p et des $u_p = A_p - A_{p+1}$, sous forme d'une somme.

I.3.b Soit $I = \int_o^{+\infty} \sum_{p=0}^{q} \frac{a_p \cos \alpha_p x}{x}\,dx$, $\alpha_p \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{p=0}^{q} a_p = 0$;

Calculer I en fonction des α_p et des a_p (on trouvera le logarithme d'un produit).

II $n = 1$, on étudie $I(m,1) = \int_o^{+\infty} \frac{\sin^m x}{x}\,dx$.

II.1 $m = 2q + 1$, $q \in \mathbb{N}^*$.

II.1.a Étudier la convergence de $I(m,1)$.

II.1.b Calculer $I(m,1)$ à l'aide d'une somme, puis donner le résultat sous forme d'un seul terme.

II.1.c Donner $I(3,1)$ et $I(5,1)$.

II.2 [illegible]

III $n \geqslant 2$, $m \geqslant n$.

III.1.a Étudier la convergence de $I(m,n)$.

III.1.b Exprimer $I(m,n)$ à l'aide de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin^m x \, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{1}{x}\right) dx$, puis à l'aide de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\sin^m x) \, \frac{dx}{x}$.

III.2 $m = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$.

III.2.a $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de $I(m,n)$ suivant que $n = 4n_1 + 1$ ou $n = 4n_1 - 1$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$.

III.2.b $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$; donner l'expression de $I(m,n)$ suivant que $n = 4n_1$ ou $n = 4n_1 + 2$, avec $n_1 \in \mathbb{N}^*$ ou $n_1 \in \mathbb{N}$.

III.2.c Donner $I(6,5)$ et $I(6,6)$; vérifier que $I(2,2) = \frac{\pi}{2}$.

IV Soit $I_m = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^m x}{x^2} \, dx$, $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.1.a Étudier la convergence de I_m .

IV.1.b On rappelle que :

pour $m = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\cos^m x = \frac{1}{2^m} \binom{m}{\frac{m}{2}} + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{\frac{m}{2}-1} \binom{m}{p} \cos(m-2p)x$

et pour $m = 2q + 1$, $q \in \mathbb{N}$, $\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{p} \cos(m-2p)x$.

En déduire que, si $[\frac{m-1}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{m-1}{2}$

$$1 - \cos^m x = \frac{1}{2^{m-2}} \sum_{p=0}^{[\frac{m-1}{2}]} \binom{m}{p} \sin^2 (\tfrac{m}{2} - p)x .$$

IV.2.a Déduire de la question précédente, l'expression de I_m en fonction de m , sous forme d'une somme.

IV.2.b En utilisant les relations : $p \binom{m}{p} = m \binom{m-1}{p-1}$ et $\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$,

exprimer $\binom{m}{p} . (m-2p)$ à l'aide de $\binom{m-1}{p}$ et $\binom{m-1}{p-1}$; on pose $\binom{m}{-1} = 0$.

En déduire l'expression de I_m , en fonction de m , à l'aide d'un seul terme.

IV.2.c Expliciter I_{2n} et I_{2n-1} , en fonction de n , $n \in \mathbb{N}^*$; comparer les résultats entre eux et avec :

$$I(2n-1,1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n-1} x}{x} \, dx .$$

IV.3 Calculer les trois intégrales :

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n-1} x \, \sin x}{x} \, dx \; ; \quad J_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} x \sin x}{x} \, dx \; ; \quad J_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x} \, dx \; ;$$

$n \in \mathbb{N}^*$.

»»»»»»»»»«««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail